

TD n° 5 : Déterminants

1. Calculer les déterminants :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ b+c & a+c & a+b \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}$$

2. Montrer qu'il n'existe pas de matrice
- $A \in M_{3,3}(\mathbb{R})$
- telle que
- $A^2 + I_3 = 0$

3. Calculer le déterminant de la matrice d'ordre
- n

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & \alpha_n \\ \vdots & & \alpha_{n-1} & \\ \vdots & \alpha_2 & & \\ \alpha_1 & & & 0 \end{pmatrix}$$

4. Calculer le déterminant d'ordre
- n
- :

$$\delta_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & \dots & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 0 & 1 & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & \dots & \dots \\ \vdots & & & & & 0 & 1 \\ 1 & \dots & \dots & \dots & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

5. Les nombres 119, 153 et 289 sont tous divisibles par 17. Montrer, sans le calculer, que le déterminant

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 9 \\ 1 & 5 & 3 \\ 2 & 8 & 9 \end{vmatrix} \text{ est divisible par 17.}$$

6. Soit
- $\Delta = |\alpha_{ij}|$
- un déterminant d'ordre
- n
- tel que :

$$\alpha_{ij} = \alpha \text{ si } i > j; \alpha_{ij} = \beta \text{ si } i < j; \alpha_{ii} = \gamma_i$$

Calculer Δ . [considérer le déterminant $D(X)$ déduit de Δ en ajoutant X à tous les éléments]

7. Soit
- $(a, b) \in \mathbb{R}^2$
- avec
- $a \neq b$
- . Pour
- $n \in \mathbb{N}$
- ,
- $n \geq 2$
- , on note
- B_n
- le déterminant suivant :

$$B_n = \begin{vmatrix} a+b & a & & 0 \\ b & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & a \\ 0 & & b & a+b \end{vmatrix}$$

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq 4$, $B_n = (a+b)B_{n-1} - abB_{n-2}$. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2, B_n = \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a-b}.$$

8. Méthode de Cramer :

Soit A une matrice d'ordre n inversible et $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ un vecteur colonne. Soit

$$\text{le système } Ax = b \text{ d'inconnue } x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

1. Combien le système possède-t-il de solutions ?
2. On note $A_1, A_2, \dots, A_n$ les n vecteurs colonnes de la matrice A . Exprimer b en fonction de ces vecteurs et des x_i .
3. En utilisant les propriétés du déterminant, calculer

$$\det(A_1, \dots, A_{i-1}, b, A_{i+1}, \dots, A_n)$$

En déduire x_i .

9. Résoudre par la méthode de Cramer les systèmes suivants

$$\begin{cases} 2x + 5y = 1 \\ 3x + 7y = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} x \cos \alpha + y \sin \alpha = \cos \beta \\ -x \sin \alpha + y \cos \alpha = \sin \beta \end{cases}$$

10. Calculer l'inverse des matrices suivantes de deux manières différentes.

$$\begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$