

DS Probabilités FI2 2006–2007 corrigé

1. Soient A et B deux événements tels que $p(AB) < p(\bar{A}\bar{B})$. Montrer que $p(A) + p(B) < 1$.

SOLUTION Comme $\bar{A}\bar{B} = \overline{A \cup B}$, nous avons

$$p(\bar{A}\bar{B}) = 1 - p(A \cup B) = 1 - p(A) - p(B) + p(AB) > p(AB)$$

d'où $1 - p(A) - p(B) > 0$.

2. On tire au hasard trois chaussettes d'un tiroir contenant trois paires noires et deux paires vertes. On choisit ensuite (toujours au hasard) deux chaussettes parmi ces trois-là.

- Quelle est la probabilité de sortir une paire de chaussettes unicolore ?

SOLUTION Soit $A = \{NNN, VVV\}$ ="premier tirage unicolore" et B ="deuxième tirage unicolore". Alors

$$p(B) = p(A)p(B|A) + p(\bar{A})p(B|\bar{A})$$

On a ensuite

$$p(A) = \frac{6}{10} \times \frac{5}{9} \times \frac{4}{8} + \frac{4}{10} \times \frac{3}{9} \times \frac{2}{8} = \frac{1}{5}, \quad p(B|A) = 1, \quad p(B|\bar{A}) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$$

d'où

$$p(B) = \frac{1}{5} \times 1 + \frac{4}{5} \times \frac{1}{3} = \frac{7}{15}$$

- Si c'est le cas, quelle est la probabilité qu'elle soit issue d'un premier tirage bicolore ?

SOLUTION D'après la formule de Bayes

$$p(\bar{A}|B) = 1 - p(A|B) = 1 - \frac{p(B|A)p(A)}{p(B)} = 1 - \frac{1 \times 1/5}{7/15} = \frac{4}{7}$$

3. Lors du transfert de données la probabilité pour qu'un bit soit converti en son opposé est égale à 0.01. Pour pouvoir détecter les erreurs on divise le message en groupes de 3 bits (appelés *mots de code*), et on rajoute un *bit de parité* à la fin de chaque groupe : 0 si la somme des trois bits est paire et 1 sinon. Exemple : 010 \rightarrow 010**1**, 110 \rightarrow 110**0**.

- Trouver la probabilité pour qu'un mot de code contienne des erreurs non détectées lors du transfert avec le bit de parité¹.

¹qui peut lui-même être altéré

SOLUTION On ne détecte pas d'erreur dans un bloc de 3+1 bits si le nombre d'erreurs X est pair : soit 2 ou 4. En supposant que $X \sim B(4, 0.01)$ nous avons

$$p(2) + p(4) = C_4^2 0.01^2 0.99^2 + C_4^4 0.01^4 = 0.00058807$$

- Quelle est la probabilité (conditionnelle) pour qu'un mot de code altéré échappe à la détection ?

SOLUTION Soit A ="mot de code altéré" et D ="erreur(s) détectée(s)". On cherche donc

$$p(\bar{D}|A) = \frac{p(A\bar{D})}{p(A)} = \frac{0.00058807}{1 - 0.99^3} \approx 2\%$$

- Quand une erreur est détectée, on recommence la transmission du bloc altéré. Quelle est la probabilité qu'un mot de code soit finalement bien transmis ? Quelle est cette probabilité pour la transmission sans codage ?

SOLUTION Soit B ="mot de code bien transmis". Avec A et D ci-dessus

$$p(B) = p(D)p(B|D) + p(A\bar{D})p(B|A\bar{D}) + p(\bar{A}\bar{D})p(B|\bar{A}\bar{D})$$

car $\{D, A\bar{D}, \bar{A}\bar{D}\}$ est une partition de Ω . Ensuite, $p(B|D) = p(B)$ (on recommence la transmission), $p(B|A\bar{D}) = 0$ et $p(B|\bar{A}\bar{D}) = 1$, donc

$$p(B) = p(D)p(B) + p(\bar{A}\bar{D}), \quad p(B) = \frac{p(\bar{A}\bar{D})}{1 - p(D)} = p(\bar{A}|\bar{D})$$

Enfin

$$p(D) = p(1) + p(3) = C_4^1 0.01^1 0.99^3 + C_4^3 0.01^3 0.99^1 = 0.03881592$$

$$p(B) = p(\bar{A}|\bar{D}) = 1 - p(A|\bar{D}) = 1 - \frac{0.00058807}{1 - 0.03881592} \approx 0.9994$$

Pour la transmission sans codage $p(B) = 0.99^3 \approx 97\%$.

4. Un groupe de 100 couples mariés participe à une soirée dansante. Chaque homme invite une cavalière au hasard. Soit X le nombre des cavaliers qui ne danseront pas avec leur propre épouse.

- Calculer $\mathbb{E}X$.

SOLUTION La v.a. $Y = 100 - X$ représente le nombre de "rencontres" étudié en TD. On pose

$$Y_i = \begin{cases} 1 & \text{si le } i\text{ème homme danse avec son épouse} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \sim \frac{0}{0.99} \mid \frac{1}{0.01}$$

Alors

$$\mathbb{E}Y = \mathbb{E}(Y_1 + \dots + Y_{100}) = 100 \times 0.01 = 1, \quad \text{d'où } \mathbb{E}X = 100 - \mathbb{E}Y = 99$$

- Calculer $\mathbb{V}(X)$.

SOLUTION Calculons $\mathbb{V}(Y)$ d'abord.

$$\mathbb{V}(Y) = \sum_{i=1}^{100} \mathbb{V}(Y_i) + 2 \sum_{i < j} \text{Cov}(Y_i, Y_j)$$

On a $V(Y_j) = 0.99 \times 0.01 = 0.0099$ et

$$Y_i Y_j \sim \frac{0}{*} \left| \frac{1}{0.01 \times 1/99} \right|, \quad \text{Cov}(Y_i, Y_j) = \frac{1}{9900} - \frac{1}{100^2} = \frac{1}{990000}$$

Il y a $100 \times 99/2$ couples (i, j) tels que $i < j$, donc

$$\mathbb{V}(Y) = 100 \times 0.0099 + 2 \times \frac{9900}{2} \times \frac{1}{990000} = 1$$

Enfin

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X - \mathbb{E}X)^2 = \mathbb{E}(100 - Y - 99)^2 = \mathbb{E}(Y - 1)^2 = \mathbb{V}(Y) = 1$$

- Trouver des bornes aussi précises que vous pouvez de la probabilité que $X > 96$. Justifiez votre réponse.

SOLUTION Par inégalité de Tchebychev unilatérale

$$p(X > 96) = 1 - p(X \leq 96) = 1 - p(X \leq 99 - 3) \geq 1 - \frac{1}{1 + 3^2} = 90\%$$

Indication : que représente $Y = 100 - X$?

Bonus Un sauteur tente de franchir les hauteurs successives $1, 2, \dots$. On suppose que la probabilité de succès à la hauteur n est $\frac{1}{n}$. Le sauteur est éliminé à son premier échec. On note X la variable aléatoire “numéro du dernier saut” (raté).

- Trouver la distribution de X .

SOLUTION

$$X \sim \frac{1}{0} \left| \frac{2}{1/2} \right| \left| \dots \right| \left| \frac{n}{1/2 \times 1/3 \times \dots \times 1/(n-1) \times (n-1)/n} \right| \left| \dots \right|$$

- Calculer la fonction génératrice de X .

SOLUTION

$$G_X(t) = \mathbb{E}e^{tX} = \sum_{n=1}^{\infty} e^{tn} \frac{n-1}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{tn}}{(n-1)!} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{tn}}{n!}$$

On pose $z = e^t$, alors les séries ci-dessus deviennent

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{(n-1)!} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = z \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{(n-1)!} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

Comme $\sum_{n=0}^{\infty} z^n/n! = e^z$, on obtient

$$G_X(t) = ze^z - (e^z - 1) = 1 + (e^t - 1)e^{e^t}$$

- En déduire $\mathbb{E}X$ et $\mathbb{V}(X)$.

SOLUTION Par dérivation

$$G'_X(t) = e^{2t} e^{e^t}, \quad G''_X(t) = (2e^{2t} + e^{3t})e^{e^t}$$

d'où

$$\mathbb{E}X = G'_X(0) = e, \quad \mathbb{V}(X) = G''_X(0) - (\mathbb{E}X)^2 = e(3 - e)$$